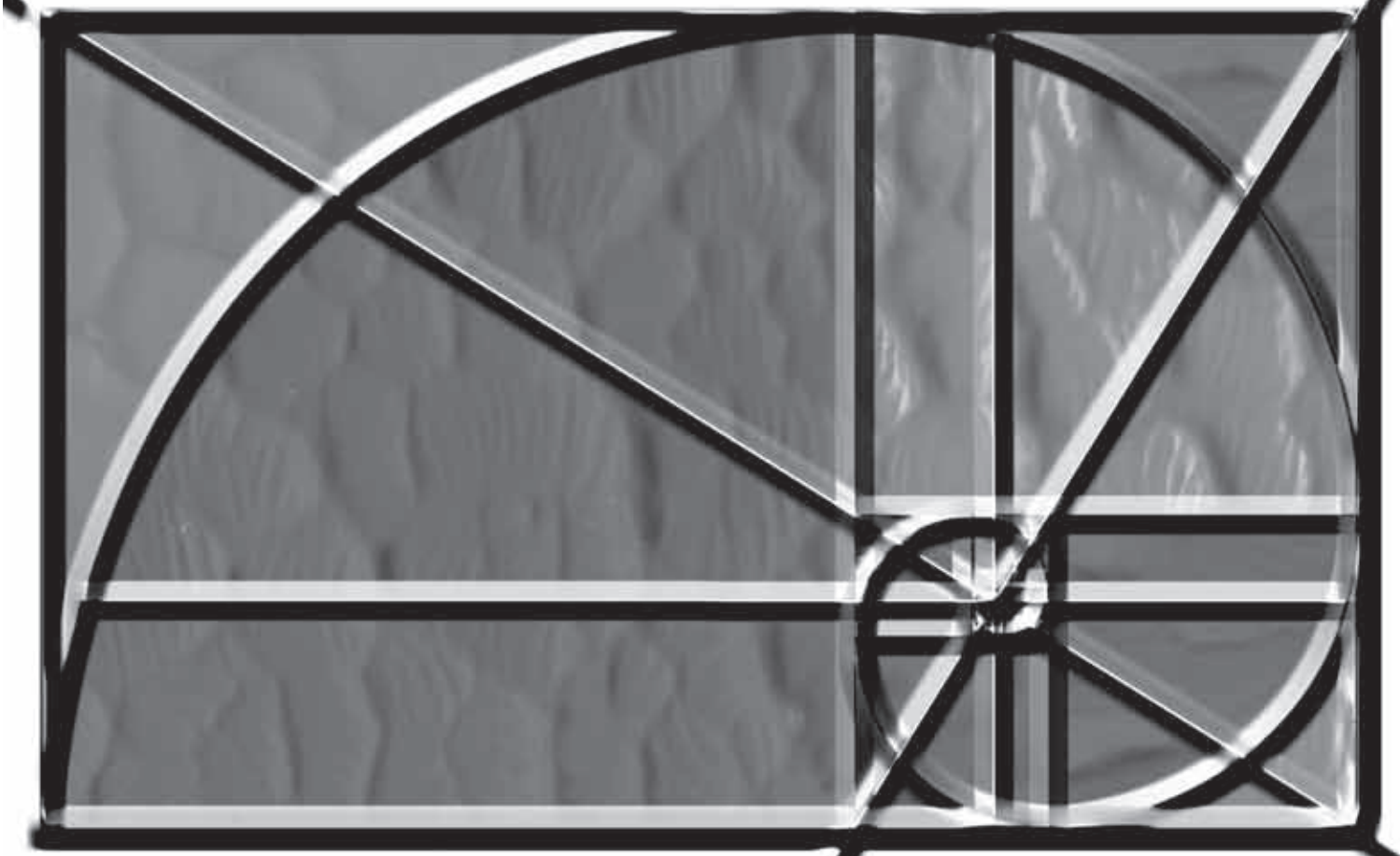
Serie Desarrollo del pensamiento matemático N° 11

Razones y Proporciones

FE Y ALEGRÍA
CAF
UNESCO
IESALC

Serie Desarrollo del pensamiento matemático N° 11

Razones y Proporciones



Martín Andonegui Zabala

UNESCO
IESALC

372.7
And.
Razones y Proporciones
Federación Internacional Fe y Alegría, 2006
32 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 980-6418-85-9
Matemáticas, Razones y proporciones

"Lograr una actitud positiva hacia los distintos, sea en el ámbito intercultural, en el de las relaciones de género, en la democracia plural o en otros, es parte de la formación humana de los alumnos como de sus docentes. Es parte de la construcción de la ética personal, que debe cruzar todas las actividades"

(Xavier Albó, S.J.)

EQUIPO EDITORIAL
Beatriz Borjas y Carlos Guédez

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Cuaderno N° 11
RAZONES Y PROPORCIONES
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del ***Programa Internacional de Formación de Educadores populares*** *desarrollado por la federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.*

Diseño y Diagramación: ***Moira Olivar***
Ilustraciones: ***Corina Álvarez***
Concepto gráfico: ***Juan Bravo***
Corrección de textos: ***Carlos Guédez y Martín Andonegui***

Edita y distribuye: Federación internacional de Fe y Alegría. Esquina de Luneta,. Edif. Centro Valores, piso 7 Altagracia, Catacas 1010-A, Venezuela. Teléfonos: (58) (212)5631776 / 5632048 / 5647423. Fax: (58) (212) 5645096 www.feyalegria.org

© Federación Internacional Fe y Alegría

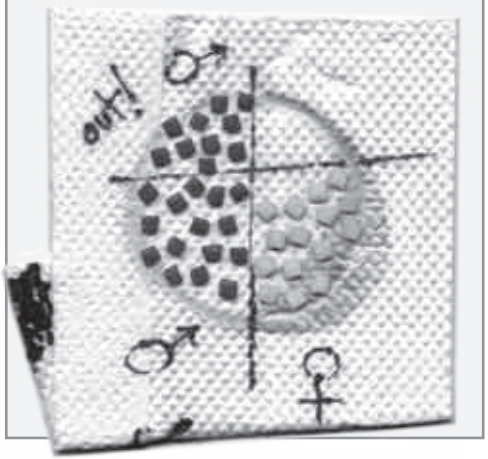
Depósito legal: if 603 2006 510 2668
Caracas, abril 2006

Publicación realizada con el apoyo de: Centro Magis. Instituto internacional para la educación superior en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina de Fomento (CAF)

A modo de introducción...

... y para desperezarnos un poco, ahí van unas cuestiones sencillas para entrar en materia y en calor. Tratemos de resolverlas antes de seguir adelante.

1. En una fiesta, la razón de chicos a chicas es de 5 a 3. Pero si se van 10 chicos, queda un número perfecto para bailar en parejas. ¿Cuántas chicas hay en la fiesta?*



2. Si cuando x vale 5, z toma el valor 15, ¿cuánto valdrá x cuando z valga 30?

• Los ángulos internos de un triángulo son directamente proporcionales a los números 2, 3 y 4. ¿Cuál es la medida de los ángulos?

• Si empanada y media cuestan centavo y medio, ¿cuánto cuestan 3 empanadas y media?

• Se tiene un mapa trazado a una escala 1:1.000.000. ¿Cuál es la distancia real, en kilómetros, de dos ciudades que sobre el mapa distan 14,2 cm?

3. Un albañil y su ayudante se dedican a una obra. El primero trabaja 4 días y su ayudante, 2. Si el salario de éste es los 2/5 de lo que gana el albañil, y juntos reciben 2.880 pesos, ¿cuál es el salario diario del ayudante?

• Si 5 gatos cazan 5 ratones en 5 minutos, ¿cuántos gatos harán falta para cazar 10 ratones en 10 minutos?

4. La razón entre dos números es 3/4. Si al menor se le suman 2 unidades y al mayor se le restan 9, se obtiene una razón inversa a la original. ¿Cuáles son los números?

• Con una lupa que aumenta 5 veces el tamaño de las cosas, se observa un ángulo de 2º. ¿De cuántos grados se verá este ángulo a través de la lupa?

5. Al momento de casarse, la razón entre las edades de la esposa y del marido era de 8/9. Doce años después, esa razón pasó a ser de 12/13. ¿Qué edades tenían ambos al casarse?

6. Las dimensiones de un cuadro son: 77 x 53 cm. ¿Cuáles de estas reducciones mantienen las proporciones del cuadro: 60,5 x 40,5 cm; 38,5 x 26,5 cm; 70 x 46 cm?

Bien, ya tenemos nuestras respuestas, que iremos contrastando con las indicaciones y ejercicios que plantearemos a lo largo de las líneas que siguen.

Y un segundo recordatorio:

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno No 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento- y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales...- que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel- ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, las razones y las proporciones.

** **Aviso para navegantes:** las respuestas a los ejercicios precedidos por un número en **negrita** aparecen al final del cuaderno. Las respuestas a los ejercicios que no se encuentran precedidos por un número son para que las construyas y las valides con tu grupo de trabajo.*

1. El concepto matemático de razón

Una de las situaciones matemáticas más frecuente en todos los Cuadernos anteriores ha sido, sin duda, la de relacionar dos cantidades: lo hemos hecho al sumarlas y restarlas, o al multiplicarlas y dividirlas. En particular, al relacionarlas mediante la resta y la división, estamos comparándolas. Hay, pues, dos tipos de comparaciones entre números: las que nos permiten averiguar cuál es el mayor calculando la diferencia existente entre ambos, o bien, calculando cuántas veces el mayor contiene al menor. En la primera situación hablamos de comparaciones o relaciones aditivas y en la segunda, de relaciones multiplicativas.

Una razón es una relación multiplicativa entre dos números naturales diferentes de 0.

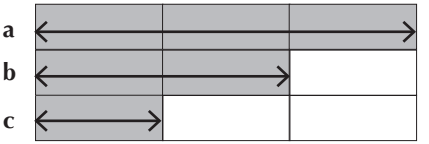
Hablamos así de la razón "dos a tres", "1 a 10", "7 a 4", etc. Por ejemplo, si en un grupo de personas hay 18 hombres y 27 mujeres, diremos que la razón entre el número de hombres y el de mujeres es de "2 a 3", es decir, que "hay 2 hombres por cada 3 mujeres". En este caso, la razón entre el número de mujeres y el de hombres es la inversa, de "3 a 2", es decir, que "hay 3 mujeres por cada 2 hombres".

Como avisábamos en el Cuaderno anterior, hay que saber distinguir entre los conceptos de razón y de fracción. Este último alude a la relación –también multiplicativa- entre la parte y el todo respectivo. En el ejemplo anterior, 2/5 representa la fracción –ya simplificada- correspondiente al número de hombres (18) con respecto al total de personas presentes (18 + 27 = 45). En el concepto de razón no está presente esta relación de carácter parte-todo.

También puede ser útil recordar los orígenes históricos de este objeto matemático llamado razón. Para ello citamos unos párrafos del Cuaderno nº 9: "Los pitagóricos (s. VI a.C.) consideraban como números solamente a los números naturales. Pensaban, además, que la naturaleza se reducía a estos números, en el sentido de que todo objeto podía expresarse con un número (la medida de su magnitud), y las relaciones entre objetos (entre sus magnitudes), siempre como una relación entre números naturales.

"Para lograr esta relación suponían que siempre funcionaría el principio de conmensurabilidad, es decir, que dadas dos magnitudes (por ejemplo, dos segmentos), siempre era posible encontrar una magnitud (un segmento) menor que "encajara" un número exacto de veces en cada una de las dos magnitudes (los dos segmentos) relacionadas. Es decir, dados los segmentos a y b, podía suceder que ni a encajara un número exacto de veces en b, ni viceversa. Pero entonces, siempre era posible encontrar un segmento menor c, tal que estuviera contenido "n veces" en a y "m veces" en b, con lo que la relación entre a y b podía denotarse mediante la expresión n/m.

"Por ejemplo (ver Figura), si la longitud de un segmento a era "una vez y media" la de un segmento b, c sería la mitad del segmento b, con lo cual b contendría 2 "minisegmentos" c, y a, 3 "minisegmentos" c; así, la relación entre a y b vendría dada por la relación 3/2, es decir, "como 3 es a 2".

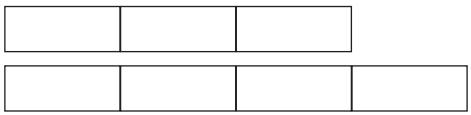


"Pero esta relación y su expresión como aparente "cociente" de dos números naturales no era considerada como un nuevo número –una fracción, la expresión de una relación parte/todo-, sino como una razón entre ambas magnitudes, es decir, como la expresión numérica de la relación entre ellas, sin que ambas estuvieran necesariamente ligadas como un par "parte/todo" (de hecho, en el ejemplo anterior, los dos segmentos son independientes). En la Aritmética de los griegos no existieron, pues, las fracciones como números al estilo de los babilonios y egipcios".

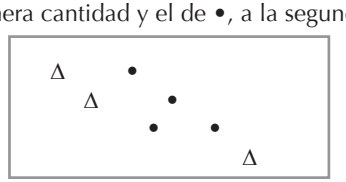
Por cierto, este modelo numérico de armonía –de razones entre números naturales- para todos los objetos medibles de la naturaleza se quebró cuando trataron de colocar en una relación conmensurable algo tan simple como el lado de un cuadrado y su diagonal. Los mismos pitagóricos demostraron que esto no era posible, que si el lado medía **1**, la diagonal debería medir $\sqrt{\mathbf{2}}$, valor inconmensurable con **1**. Por eso los números como $\sqrt{\mathbf{2}}$ se denominan "irracionales", porque no pueden expresarse como una razón conmensurable con la unidad. "Hasta ese momento los griegos habían identificado número y geometría, pero la existencia de razones inconmensurables destruía esa identificación" (Kline, 1992, p. 59): la Aritmética griega cedía todo el paso a la Geometría.

Pero a pesar de su "fracaso" en garantizar este modelo numérico de armonía –de razones entre números naturales- para todos los objetos medibles de la naturaleza, los griegos continuaron con el estudio de las razones numéricas, utilizando como ejemplos de números las medidas de objetos geométricos (segmentos de recta, superficies de figuras planas, etc.). Este estudio, inspirado en los trabajos de Eudoxo (s. IV a. C.), se incluye en el Libro V de los Elementos de Euclides (s. III a. C.), la obra matemática más leída de la antigüedad.

Como en el caso de las fracciones, resulta imprescindible hablar de la representación de las razones. Tradicionalmente se escriben en forma numérica, separando los dos números mediante los signos : ó /. Por ejemplo, la razón "**3 a 4**" se representa **3 : 4** ó **3/4**. Pero también puede representarse en forma de porcentaje; por ejemplo, en el caso anterior se puede decir que "la primera cantidad representa el **75%** de la segunda". Y pasando a otros sistemas, la razón también puede llevarse a un gráfico continuo (la primera figura representa la primera cantidad y la otra, la segunda cantidad):



Y también puede llevarse a un gráfico discreto: (el número de Δ corresponde a la primera cantidad y el de •, a la segunda):



Si estamos a punto de empezar el día 27 de mayo, y este año no es bisiesto, ¿cuál es la razón entre los días ya transcurridos y los que faltan para culminar el año?

Tenemos que contar los días transcurridos:

31 + 28 + 31 + 30 + 26 = 146 días. Por consiguiente, faltan **365 – 146 = 219 días**. La razón buscada es **146/219** ó, en forma irreducible, **2/3** (ya que m.d.c.**(146, 219) = 73, y 146 = 2 x 73 y 219 = 3 x 73)**.

2. La aritmética de las razones

O dicho de otra manera, ¿qué operaciones aritméticas pueden hacerse con las razones? ¿Pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse como, por ejemplo, las fracciones? ¿Qué sentido pueden tener estas operaciones con razones?

De entrada, digamos que no pueden sumarse (ni, por consiguiente, restarse). Sin embargo, en algunos textos se afirma lo contrario y se sugieren situaciones como ésta: "Un jugador de baloncesto acierta 7 tiros de cancha y falla 5 en un partido; en el siguiente juego, acierta 3 y falla 6. ¿Cuál es la razón de tiros acertados a fallados en el conjunto de los dos partidos?". Y se responde así: "los tiros acertados son **7 + 3 = 10**, y los fallados, **5 + 6 = 11**; la razón solicitada es **10/11**, que puede ser obtenida mediante la siguiente "suma" de razones: $\frac{7}{5}+\frac{3}{6}=\frac{7+3}{5+6}=\frac{10}{11}$. Y ése es el algoritmo de la suma de razones, diferente al de la suma de fracciones".

Evidentemente, la respuesta 10/11 es correcta (acierta 10 tiros por cada 11 que falla) porque los números que entran en las razones de cada juego (7, 5, 3, y 6) son las mismas cantidades de tiros acertados y fallados. Pero, ¿qué ocurre si la segunda razón **(3/6)** se expresa reducida en la forma **1/2** (obsérvese que esto se puede hacer, ya que "**3 es a 6**" equivale a "**1 es a 2**")? En este caso, la "suma" debería ser $\frac{7+1}{5+2}=\frac{8}{7}$ (acierta 8 tiros por cada 7 que falla), lo cual no es cierto. De modo que la razón "suma" dependería de la forma (reducida o amplificada) en que se presenten las razones "sumandos", lo que anula la posibilidad de hablar de una verdadera operación de adición.

Por lo tanto, no es correcto hablar de la suma de razones. Para hallar la razón entre dos magnitudes a lo largo de varias situaciones (por ejemplo, la razón del número de niños al de niñas en el conjunto de varias aulas de una escuela), lo que deben "sumarse" por separado son las cantidades de cada uno de los grupos, niños y niñas, y obtener luego la razón definitiva; ésta es la única manera de evitar confusiones y posibles errores. Así, pues, sumar razones no tiene sentido, como sí lo tiene en cambio sumar fracciones, ya que aquí se agregan partes de un mismo todo.

Pero en lo que respecta a la multiplicación de razones, esta operación sí puede tener sentido. Por ejemplo, si en una reunión la razón de personas de la provincia del Norte con respecto a la del Centro es **3/7**, y la razón de personas de la provincia del Centro con respecto a la del Sur es **2/5**, podemos preguntarnos cuál será la razón de personas de la provincia del Norte con respecto a la del Sur.

Para resolver esta situación podemos considerar la primera razón como 6 a 14, y la segunda como 14 a 35; es decir, hemos buscado que el segundo término de la primera coincida con el primer término de la segunda razón. Ahora puede inferirse que la razón de personas de la provincia del Norte con respecto a la del Sur es 6/35 (¿por qué?). Este resultado equivale a haber multiplicado entre sí los primeros términos de las dos razones (3 x 2 = 6) y, también entre sí, los segundos términos (7 x 5 = 35).

Por consiguiente, ***dadas la razón de una magnitud respecto a una segunda, y la razón de esta última con respecto a una tercera, la razón que corresponde a la primera magnitud con respecto a la tercera se obtiene "multiplicando" las dos primeras como si se tratara de dos fracciones*** (en realidad estamos manejando las razones como operadores, de una forma similar a como lo hacíamos con las fracciones).

En las elecciones presidenciales de cierto país, la razón del número de votos del candidato A con respecto al candidato B es 2/3; y la de B con respecto al candidato C, 5/7. Se desea saber si la votación de A llegó a la mitad de la de C.

Como antes, busquemos la razón entre el número de votos de A y C. Esta razón vendrá dada por: $\frac{2}{3} x \frac{5}{7} = \frac{2x5}{3x7} = \frac{10}{21}$; es decir, por cada 10 votos de A, C obtiene 21. De donde se desprende que la votación de A no llegó a la mitad de la de C.

En otras elecciones, la razón del número de votos del candidato M con respecto al candidato N es 2/3; y la de M con respecto al candidato P, 5/7. Se desea saber quién ganó las elecciones.

Está claro que M no las ganó, pues sacó menos votos que N y que P. La pregunta es quién de estos dos candidatos obtuvo mayor número de votos. Y la respuesta viene por la vía de obtener la razón entre el número de votos de ambos. Para ello contamos con un referente común: las razones de votos de cada candidato con M.

Ahora bien, la forma en que se presentan estas dos razones no parece estar "bien ordenada": necesitamos colocarlas como la razón de N a M, y de M a P, para que M nos sirva de "puente" entre N y P. En este sentido, el enunciado se transforma en: "la razón del número de votos del candidato N con respecto al candidato M es **3/2** (inverso de **2/3**); y la de M con respecto al candidato P, **5/7**". Ahora sí podemos hallar la razón entre los votos de N y P: $\frac{3}{2} x \frac{5}{7} = \frac{3x5}{2x7} = \frac{15}{14}$, es decir, por cada **15** votos de **N**, **P** obtiene **14**. Luego el candidato N ganó las elecciones.

Conviene destacar que **el procedimiento de hallar la razón entre dos magnitudes puede ser una de las formas de responder a la pregunta de cuál de ambas es mayor.** Obsérvese que, en este caso, no es necesario conocer el valor exacto de ambas cantidades. Por esta vía de hallar la razón no tenemos, pues, que hallar dos valores desconocidos (las dos cantidades), sino uno solo: la razón entre ambas.

3. El concepto matemático de Proporción

En uno de los ejemplos expuestos anteriormente, hablamos de un grupo formado por 18 hombres y 27 mujeres y que, en esta situación, la razón del número de hombres al de mujeres era 2/3. Pero también podíamos haber dicho que la razón era 18/27, ó 6/9, ó 36/54... Como puede verse, todas estas razones son iguales, expresan la misma relación multiplicativa entre los números. Pues bien, al indicar la igualdad de dos razones estamos creando un nuevo objeto matemático: la proporción.

Se llama proporción al conjunto de dos razones iguales.

Si las razones iguales son a/b y c/d, la proporción se denota a/b = c/d ó a : b : : c : d y se lee "a es a b como c es a d"

Un ejemplo de proporción es 2/3 = 4/6, cuya lectura es "2 es a 3 como 4 es a 6". De nuevo hay que recordar la distinción entre razones y fracciones, para no ver en la expresión anterior "la equivalencia de dos fracciones" (que será la lectura correcta cuando se hable de fracciones, pero no ahora...).

Vamos con la nomenclatura relativa a las proporciones. El uso de la notación a : b : : c : d nos ayuda a identificar a los números a y d como los *extremos* de la proporción y a los números b y c como los *medios* de la proporción. Por ejemplo, en 2/3 = 4/6, 2 y 6 son los extremos de la proporción, y 3 y 4, los medios.

Una proporción cuyos extremos y medios son diferentes se denomina *discreta*; por ejemplo, la anterior. Y *continua*, si los medios (o los extremos) son iguales entre sí; su forma sería: a/b = b/c ó a/b = c/a. Por ejemplo, 2/6 = 6/18. En una proporción discreta, cualquier término se denomina *cuarta proporcional de los otros tres*. Así, en el ejemplo 2/3 = 4/6 decimos que 3 es cuarta proporcional de 2, 4 y 6, ó que 4 lo es de 2, 3 y 6. En una proporción continua, el término repetido se denomina *media proporcional de los otros dos*, y estos dos últimos, *tercia proporcional del otro término*. Así, en el ejemplo 2/6 = 6/18, 6 es media proporcional de 2 y 18, y 2 y 18 son tercias proporcionales de 6.

a) Escriba dos proporciones en las que 8 sea media proporcional de otros dos números.

b) Escriba otras dos proporciones en las que 12 sea cuarta proporcional de tres números.

Las proporciones presentan numerosas propiedades, que ya fueron estudiadas por los griegos y aparecen en el Libro V de los Elementos de Euclides. Esta es la fundamental:

1. En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longleftrightarrow a\,x\,d = b\,x\,c$$

De aquí se desprende que un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el otro extremo, y que un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el otro medio:

$$a = \frac{bxc}{d} \qquad d = \frac{bxc}{a} \qquad b = \frac{axd}{c} \qquad c = \frac{axd}{b}$$

La comprobación de estas igualdades es muy fácil; puede verificarse con cualquiera de los ejemplos anteriores. Pero lo interesante es "saber ver proporciones" en todo producto de la forma a x d = b x c, o en toda expresión que pueda reducirse a ella.

2. De toda proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, o de su expresión equivalente a x d = b x c, pueden derivarse otras tres proporciones diferentes:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \qquad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

Por ejemplo, si se tiene $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, ó **3 x 12 = 4 x 9**, puede llegarse a las proporciones:

$\frac{3}{9}=\frac{4}{12}$, $\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ ó $\frac{12}{4}=\frac{9}{3}$.

Obsérvese que, aun cuando manejan los mismos números como medios o extremos, cada una de las cuatro proporciones anteriores responde a una razón diferente: **3/4, 1/3, 4/3 y 3**, respectivamente.

Presentamos otras propiedades, de muy fácil verificación (de la 5 a la 11 son propiedades derivadas de algunas transformaciones que pueden realizarse con los propios términos de una proporción). Recuérdese que, en virtud de la propiedad 2, de cada una de las que se proponen pueden derivarse otras tres.

3. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{mxa}{nxb}=\frac{mxc}{nxd}$

4. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, entonces $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$

5. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ y $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$

6. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y a>b, entonces $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ y $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$

7. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y a>b, entonces $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

8. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$ y $\frac{a+c}{a}=\frac{b+d}{b}$

9. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y a>c, entonces $\frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d}$ y $\frac{a-c}{a}=\frac{b-d}{b}$

10. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y a>c, entonces $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$

11. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, entonces $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}$

Considere **a = 20, b = 12, c = 5, d = 3, e = 15, f = 9, m = 4, n = 7**, y verifique todas las propiedades anteriores.

En una ciudad, el número de lectores del periódico La Primera y el de lectores de La Segunda están en razón de 3 a 5. Si se certifica que hay 162.840 lectores de La Segunda, ¿cuántos hay de La Primera?

Si denotamos por n el número de lectores solicitado, basta plantear la proporción: $\frac{n}{162.840}=\frac{3}{5}$. Y aplicando la propiedad 1, n = $\frac{3x162.840}{5}$ = 97.704 lectores.

La razón de dos números es 7/3 y su diferencia, 244. ¿Cuánto vale su suma?

Sean a y b el 1º y 2º términos de la razón buscada. Sabemos que a/b = 7/3 y que a – b = 244. Para hallar los valores de a y de b podemos apoyarnos en la propiedad 7 de las proporciones: Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y a>b, entonces $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, que se traduce ahora en: $\frac{a}{b}=\frac{7}{3}\rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{7+3}{7-3}$ $\rightarrow\frac{a+b}{244}=\frac{10}{4}$. Y de aquí deducimos que

a + b = $\frac{244\,x10}{4}$ **= 610**. Obsérvese que hemos llegado a la suma solicitada sin necesidad de hallar el valor de cada uno de los sumandos.

En una escuela de 540 alumnos, la razón del número de niñas al número de niños es de 5 a 4. ¿Cuántas niñas hay en esa escuela?

Sean a y b el número de niñas y de niños, respectivamente. Sabemos que **a/b = 5/4** y que **a + b = 540**. Para hallar los valores de a y de b podemos apoyarnos en la propiedad 5 de las proporciones: Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$, que se traduce ahora en: $\frac{a}{b}=\frac{5}{4}\rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{5+4}{5}$ $\rightarrow\frac{540}{a}=\frac{9}{5}$. Y de aquí deducimos directamente que

a = $\frac{540x5}{9}$ = 300. En la escuela hay **300 niñas y 240 niños**.

Obsérvese que cuando se desconocen dos de los términos de una proporción, pero nos aportan como dato su suma o su diferencia y la razón entre ambos, resulta muy oportuno el uso de las propiedades descritas más arriba, ya que tienen la virtud de reducir el cuadro de cantidades desconocidas a una sola (un medio o un extremo de la proporción), que puede obtenerse directamente de acuerdo a lo expresado en la propiedad 1.

4. Algunas situaciones particulares referidas a razones y proporciones

4.1. Las escalas

Las escalas aluden al conocido problema de representar algún objeto o parte de la realidad en un mapa, plano o dibujo, sin distorsionar las relaciones que guardan entre sí los elementos que componen la realidad que se representa. Cuando esta transformación se hace correctamente, se dice que el dibujo, mapa o plano está "hecho a escala" (las fotografías y las fotocopias reducidas o ampliadas son ejemplos de reproducciones automáticas a escala).

Hacerlo correctamente significa que se conservan, en el papel, las relaciones multiplicativas presentes en el objeto. Así, si un elemento A de la realidad mide la mitad de otro B, esa misma relación multiplicativa debe mantenerse en el papel. Indudablemente, estamos hablando de razones. Para conseguir una representación válida resulta clave hallar la escala o razón que existe entre la longitud de un determinado segmento del dibujo, plano o mapa, y la longitud del segmento correspondiente en la realidad representada.

Por ejemplo, si se dibuja el plano de una vivienda de tal modo que una distancia real de 10 metros se reduce a 2,5 cm en el plano, la escala utilizada es 2,5 cm : 10 m = 25 mm : 10.000 mm = 1 : 400 (habitualmente, el premier término de la escala suele ser 1). Esto significa que cualquier medida sobre el plano debe multiplicarse por 400 en la realidad, y que cualquier medida en la realidad debe dividirse entre 400 para dibujarla en el plano.

Si denominamos:
d a la medida del objeto en el plano, mapa o dibujo;
D a la medida del objeto en la realidad;
1/N a la escala utilizada;

Podemos establecer la siguiente proporción: $\frac{d}{D}=\frac{1}{N}$.

Y de aquí, en virtud de la propiedad 1 deducimos: **D = N x d** y **d = D/N**.

Se tiene un mapa trazado a una escala 1:1.000.000. ¿Cuál es la distancia real, en kilómetros, de dos ciudades que sobre el mapa distan 14,2 cm?

Nos piden el valor de D, con **d = 14,2 cm** y **N = 1.000.000**. Luego será: **D = 14, 2 cm** x ***1.000.000 = 14.200.000 cm = 142 km.***

Si un campo de fútbol mide 98 m de largo por 52 de ancho, ¿cuáles serán sus dimensiones si se dibujan a una escala de 1: 250?

Ahora se piden dos valores de d, correspondientes a dos valores de D, con N = 250. Tendremos: el largo = 98 m/250 = 0,392 m. Y el ancho = 52 m/250 = 0,208 m. En el papel, las dimensiones del campo serán 39,2 cm de largo y 20,8 cm de ancho. Puede verificarse que los valores reales y los del dibujo forman una proporción exacta: 98 m/52 m = 39,2 cm/20,8 cm

4.2. Los repartos proporcionales

Se trata del tipo de situación en la que hay que repartir una cantidad de alguna magnitud entre diversos sujetos, de acuerdo con ciertas razones establecidas entre éstos. Por ejemplo, si se desea repartir una ganancia de 120.000 pesos entre dos socios cuyos aportes al capital están en razón de 3 a 5, la situación puede resolverse mediante la proporción siguiente: si *y* y *z* representan, respectivamente, las cantidades a percibir por cada socio, tenemos: *y*/*z* = 3/5, con el dato adicional: *y* + *z* = 120.000. Haciendo uso de la propiedad 5 de las proporciones:

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ y $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$, llegamos a: $\frac{120.000}{y}=\frac{8}{3}$ y $\frac{120.000}{z}=\frac{8}{5}$. Y de ahí: $y = \frac{120.000x3}{8}$ y $z = \frac{120.000x5}{8}$. Proceso

que podemos generalizar:

Cuando se trata de repartir proporcionalmente una cantidad N entre dos elementos que se hallan en una razón a/b, la cantidad percibida por el primer elemento es: $\frac{Nxa}{a+b}$; y la percibida por el segundo es: $\frac{Nxb}{a+b}$ Este proceso puede generalizarse al caso en que haya más de dos elementos en el reparto proporcional.

Los ángulos internos de un triángulo son directamente proporcionales a los números 2, 3 y 4. ¿Cuál es la medida de los ángulos?

Como la suma de las medidas de los tres ángulos es 180º, los valores de cada ángulo son:

$\frac{180^\circ x2}{2+3+4}$, $\frac{180^\circ x3}{2+3+4}$ y $\frac{180^\circ x4}{2+3+4}$, es decir, 40°, 60° y 80°.

5. Proporcionalidad directa entre dos magnitudes

En los ejemplos relativos al caso de las escalas, veíamos que se relacionaban dos conjuntos: el de los tamaños de los objetos reales y el de los tamaños de los dibujos a escala. Esa forma de relacionarse es muy peculiar: si se toma un par de valores correspondientes, uno de cada conjunto, se establece entre ellos una razón: justamente, la de la escala. Y si se toma otro par de valores correspondientes, vemos que la razón entre ellos es la misma. Y así con todos los pares de valores correspondientes que se puedan componer.

Podemos referirnos a ambos conjuntos como ***magnitudes***, es decir, como entidades medibles; y a los valores que pueden tomar sus elementos (es decir, los tamaños de los objetos reales y de los dibujos), como ***medidas***. Lo importante para estas dos magnitudes es lo que decíamos ahora, que si tomamos dos pares cualesquiera de valores relacionados, uno de cada magnitud, siempre formarán una proporción (verifíquelo con valores del primer ejemplo de las escalas).

De aquí que podamos decir que estas dos magnitudes están relacionadas proporcionalmente. Más precisamente, que ***las dos magnitudes están en una relación de proporcionalidad directa***, es decir, que ***si los valores de una de ellas se multiplican o dividen por un número, los de la otra quedan multiplicados o divididos por el mismo número***. El vínculo de la relación es, justamente, la razón que liga a los dos valores de cada par relacionado.

Hay muchas situaciones –en la matemática, en otras ciencias, en la vida diaria...- en las que se presentan **pares de magnitudes relacionadas proporcionalmente de una manera directa.** Son ejemplos de estos pares de magnitudes:

- El número de objetos (o kilos, litros, etc.) que se compran y el precio a pagar
- El número de manos (normales) y el número de dedos presentes
- A una velocidad constante, el tiempo transcurrido y la distancia recorrida
- La masa y el peso de un objeto
- En un cuadrado, la longitud de un lado y la medida del perímetro
- El número de obreros y la cantidad de trabajo realizado
- Trabajando a destajo, el número de horas trabajadas y el salario percibido
- La participación en el capital y la participación en las ganancias
- En un momento dado, las alturas de los objetos y las longitudes de las sombras que proyectan bajo el sol
- Las cantidades de los ingredientes de una receta y el número de comensales
- La medida de ángulos a simple vista y a través de un lente de aumento

¿Cómo podemos representar la situación de dos magnitudes ligadas mediante una relación de proporcionalidad directa? Podemos hacerlo de varias formas:

1. Mediante una tabla de valores. Por ejemplo, si un lápiz cuesta 14 pesos, podemos construir la siguiente tabla:

No. de lápices	No. de pesos
1	14
2	28
3	42
...	...

2. Mediante una expresión simbólica o fórmula. Por ejemplo, en el caso anterior nos damos cuenta de que el costo a pagar depende del número de lápices comprados, y como la razón de cualquier par de valores "costo a pagar" – "número de lápices comprados" es 14, éste es el factor constante por el que hay que multiplicar cualquier valor de esta última variable para obtener el correspondiente de la otra. Si, simbólicamente, representamos la variable "costo a pagar" con la letra *c*, y la variable "número de lápices comprados" con la letra *n*, podemos representar la relación entre ambas variables de la forma: ***c* = 14 x *n*.**

En general, si los valores de la magnitud *y* están relacionados con sus correspondientes de la magnitud *x* mediante la razón *r*, la relación entre ambas magnitudes puede representarse simbólicamente mediante la fórmula: *y* = *r* x *x*. Esta expresión nos permite obtener cualquier valor desconocido si se conocen los otros dos valores en juego.

Debemos insistir en que toda expresión de la forma $y = k \times x$ (k es un valor constante) puede ser reconocida como la expresión de una relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes *y* y *x*. El término *k* representa la razón existente entre cualquier par de valores correspondientes a las magnitudes *y* y *x* (en ese orden), y recibe el nombre de ***constante de proporcionalidad***.

Evidentemente, la relación anterior puede representarse también por $x = c \times y$. En este caso, el término c representa la razón existente entre cualquier par de valores correspondientes a las magnitudes *x* e *y* (ahora en ese orden); el valor de *c* será el inverso de *k*.

Finalmente, es de hacer notar que las expresiones del tipo $m \times y = n \times x$ (con m y n fijos) también caen en el grupo anterior, ya que pueden escribirse como $y = (n/m) \times x$.

3. Mediante una expresión verbal. Por ejemplo, si decimos que "el número de niñas es el doble del de los niños", o si "por cada dos niñas hay un niño", o si "el número de niñas es al de niños como 2 es a 1", etc. Con la información contenida en cualquiera de estas expresiones podemos pasar a su expresión simbólica, o si damos un valor de una de las magnitudes, se puede establecer la proporción correspondiente.

Veamos algunos ejercicios relacionados con las formas de representación revisadas:

Explique por qué los siguientes pares de magnitudes no son directamente proporcionales:

1. La edad y el número de dientes de una persona
2. La estatura y el peso de las personas
3. La cantidad de abono orgánico en un campo y su producción agrícola
4. La longitud del lado de un cuadrado y el área de éste
5. Para recorrer una distancia fija, la velocidad de un vehículo y la duración del viaje
6. El número de kilos que pesan los enseres en una mudanza y el costo de la misma, si hay una tarifa por alquiler del vehículo y otra por cada kilo de enseres mudados
7. El número de personas en la fiesta y el trozo de pastel que le tocará a cada una
8. El número de calmantes a tomar y la cantidad de dolor a disminuir
9. Para hacer una obra fija, el número de obreros y el tiempo para terminar la obra
10. El número de años que una pareja llevan casados y el número de sus hijos
11. El tiempo que el usuario permanece en el taxi y el costo del servicio, si se cobra una tarifa por subir al taxi y otra por cada minuto de servicio

7. El siguiente es un fragmento de una tabla con las "Tarifas para calcular el valor de los esclavos" durante los años que siguieron a la Guerra de Independencia venezolana (Uslar Pietri, 1981, p. 222):

Edad en años	Valor en pesos
11	200
12	230
13	270
14	290
15	300

¿Existía una relación de proporcionalidad directa entre ambas magnitudes?

Determine una fórmula para expresar la proporcionalidad directa entre los siguientes pares de magnitudes:

1. El número de objetos (o kilos, litros, etc.) que se compran (n) y el costo total a pagar (p)
2. El número de manos (normales) (m) y el número de dedos presentes (d)
3. A una velocidad constante, el tiempo transcurrido (t) y la distancia recorrida (d)
4. La masa (m) y el peso de un objeto (p)
5. En un cuadrado, la longitud de un lado (l) y la medida del perímetro (p)
6. La medida de ángulos a simple vista (v) y a través de un lente de aumento (a)

1 R. Si denotamos con u el precio de cada unidad: p = n x u

2 R. d = 5 x m

3 R. Si denotamos con v la velocidad constante: d = v x t

4 R. Si denotamos con g la aceleración de la gravedad: p = m x g

5 R. p = 4 x l

6 R. a = v (sea cual sea el factor de aumento del lente, la medida del ángulo no varía...)

Escriba la expresión o fórmula que recoge el siguiente enunciado: "En esta escuela, por cada 15 alumnos hay un maestro".

Si denotamos con *a* el número de alumnos y con *m*, el de maestros, quizá se nos ocurra escribir: **15 x a = m**, expresión que es incorrecta. Suele caerse en este error porque confundimos lo que es una magnitud, con una abreviatura; así, *a* suele entenderse como la abreviatura de "alumno" y no como la magnitud "número de alumnos". Y además, porque se considera la transcripción directa del enunciado como si fuera la fórmula del caso: "...15 alumnos...hay 1 maestro" ... **15 x a = 1 x m.**

Para no caer en este error hay que preguntarse desde el comienzo: ¿qué número es mayor, el de alumnos o el de maestros? Resuelto esto (es menor el número de maestros), está claro que es esta magnitud la que debe multiplicarse por la cantidad mayor (15) para igualarse con la otra magnitud (número de alumnos): 15 x *m* = *a*. Otra forma de evitar los errores consiste en plantearse correctamente la proporción del caso: como el número de alumnos es mayor que el de maestros, en razón de 15 a 1, se tiene: *a*/*m* = 15/1, de donde se llega a: *a* = 15 x *m*.

8. Si *t* representa el número de taxis y *c* el de choferes, escriba la expresión o fórmula que recoge el siguiente enunciado: "Por cada 3 taxis hay 4 choferes".

9. Si *m* representa el número de alumnos aprobados, y *n* el de reprobados, exprese verbalmente ("por cada... hay...") la relación entre ambas magnitudes simbolizada por la expresión: 3 x *m* = 7 x *n*.

Las razones "dentro" y "entre"

Tomemos un caso de proporcionalidad directa entre dos magnitudes; por ejemplo, el de los precios de un determinado artículo, cuya unidad vale 60 pesos. Vemos que 3 artículos valdrán 180 pesos, que 12 artículos se venderán en 720 pesos, etc. Vergnaud (1988) da a las "magnitudes" el nombre de ***espacios de medidas***. En estos términos, aquí podemos destacar dos espacios de medidas: el del número de artículos y el de los precios:

Espacio de medidas 1 Número de artículos	Espacio de medidas 2 Precios
3	180
12	720
9	540
.....	.....

De acuerdo con lo expresado con anterioridad, entre estas dos magnitudes queda establecida una relación de proporcionalidad directa, una de cuyas representaciones (además de la tabular) es p = 60 x n (p expresa el monto del precio, y n el número de artículos). El número 60 expresa la razón entre un par de valores correspondientes precio/nº de artículos (180/3, 720/12, 540/9, etc.). Vergnaud califica a esta razón entre dos valores correspondientes, uno de cada espacio de medida, como una ***razón entre*** (entre ambos espacios de medida).

Pero también podríamos haber calculado, en cada espacio de medida, la razón entre dos valores del mismo espacio (3/12 y su correspondiente 180/720; ó 12/9 y su correspondiente 720/540, etc.). Vergnaud califica, a su vez, a esta razón entre dos valores del mismo espacio de medida, como una ***razón dentro*** (dentro del mismo espacio de medida).

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, como en el ejemplo, la razón "entre" se mantiene constante para cualquier par de valores o medidas correspondientes (una de cada espacio de medida). Por su parte, las razones "dentro" varían de acuerdo al par de medidas seleccionadas en el mismo espacio; por ejemplo, 3/12 es diferente de 12/9; pero las razones "dentro" formadas por los valores correspondientes en el otro espacio, son las mismas cada vez: 180/720 equivale a 3/12 (es 1/4 en ambos casos), y 720/540 equivale a 12/9 (es 4/3 en ambos casos).

A partir de la tabla siguiente:

Espacio de medidas 1	Espacio de medidas 2
a	b
c	d

podemos entender que lo que plantea Vergnaud es simplemente destacar estas dos proporciones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ como razón "entre", y $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ como razón "dentro" (proporciones que son equivalentes, como ya veíamos en la propiedad 1). Pero esta precisión de Vergnaud tiene su utilidad, como veremos más adelante.

[El tema de las magnitudes directamente proporcionales se tomará más adelante, en el Cuaderno que dedicaremos a las funciones matemáticas. Allí veremos que la expresión "magnitud" (utilizada desde Eudoxo y Euclides) se sustituirá por "variable", y la "medida" de una magnitud, por la de "valor" de una variable; también veremos que la relación de proporcionalidad directa entre dos variables se denominará función lineal; y estudiaremos su representación gráfica, además de los tres modos anteriores de representación.]

5.1. La Regla de tres directa

Para resolver, por ejemplo, la situación: "Si 2 lápices cuestan 52 pesos, ¿cuánto costarán 5 lápices?", podemos proceder de varias maneras. Ante todo, necesitamos reconocer si la relación entre las magnitudes "número de lápices" y "costo a pagar" es de proporcionalidad directa (¿lo es?; ¿por qué?). A partir de aquí formamos la proporción entre dos pares de valores correspondientes lápices/pesos: $\frac{2}{52}=\frac{5}{z}$. De donde, según la propiedad 1 de las proporciones, **z = (52 x 5)/2 = 130 pesos.**

También puede procederse así –a partir siempre del reconocimiento de la relación entre las dos magnitudes como de proporcionalidad directa-: percibimos que la razón entre valores correspondientes de ambas (la constante de proporcionalidad) es 26 (obtenida del par 52 : 2), con lo que establecemos la expresión simbólica de la relación: **costo = 26 x nº de lápices**.

De donde concluimos que el costo de los 5 lápices será: **costo = 26 x 5 = 130 pesos.**

Estos procedimientos pueden plasmarse en lo que se reconoce tradicionalmente como la ***técnica de la regla de tres directa***, establecida para resolver situaciones como la anterior, en las que –al formarse una proporción con dos pares de valores correspondientes de dos magnitudes ligadas mediante una relación de proporcionalidad directa- **de los cuatro valores implicados se conocen tres y se desconoce uno.**

Esta técnica sugiere una evaluación de la pertinencia de su uso, una disposición de los datos, y un proceso de razonamiento que desembocan en una regla mecánica de cálculo (seguimos con el mismo ejemplo):

Pertinencia de su uso: Sí: estamos en una situación de proporcionalidad directa.

Disposición de los datos:

Nº de lápices	**Costo (pesos)**
2	52
5	z

Razonamiento:

Si 2 lápices cuestan 52 pesos, 1 lápiz cuesta 2 veces menos (52/2);

y 5 lápices, 5 veces más ($\frac{52}{2}x5$). De donde, $z = \frac{52x5}{2} = 130$ pesos.

Regla mecánica: Se multiplican los valores de la diagonal donde no está la incógnita y se divide entre el término restante.

Evidentemente, esta regla no debe enseñarse en primer lugar ni como procedimiento único, sino después de analizar y comprender el proceso de proporcionalidad directa; en realidad, debe ser descubierta por los alumnos, con la orientación del (la) maestro(a).

Obsérvese que la expresión $z = \frac{52x5}{2}$ puede tener dos lecturas: como $\frac{52}{2}x5$ y como $52x\frac{5}{2}$. En el primer caso se está multiplicando por 5 la razón 52/2 (razón "entre", según Vergnaud); en el segundo, se multiplica por 52 la razón 5/2 (razón "dentro", según Vergnaud); ambas lecturas tienen sentido.

Si empanada y media cuestan centavo y medio, ¿cuánto cuestan 3 empanadas y media?

Estamos ante una situación de proporcionalidad directa. Disponemos así los datos:

Nº de empanadas	**Costo** (centavos)
1 ½	1 ½
3 ½	x

Aplicamos directamente la regla y tenemos: **x = (3 1/2 x 1 1/2)/(1 1/2) = 3 1/2 centavos** (del tiempo de la Colonia, claro...).

Si la mitad de un tanque contiene 4.300 litros, ¿cuántos litros contiene la quinta parte de ese tanque?

Esta es una situación de proporcionalidad directa.

Así van los datos:

Parte del tanque	Capacidad (litros)
1/2	4.300
1/5	x

Razonamos así: Si la mitad del tanque contiene 4.300 litros, el tanque completo contendrá 2 veces más (4.300 x 2), y la quinta parte del tanque, 5 veces menos [(4.300 x 2)]/5. De donde, **x = [(4.300 x 2)]/5 = 1.720 litros**. Obsérvese que no hemos operado con los símbolos de las fracciones, sino con su significado.

5.2. El caso particular del Porcentaje %

Del porcentaje dijimos en el Cuaderno nº 9 que podía tomarse como un sistema de representación de una fracción (por ejemplo, si en una reunión hay 5 hombres y 20 mujeres, el 80% de los presentes son mujeres). Y en este Cuaderno, que puede representar a una razón (en el mismo ejemplo, la razón de hombres a mujeres es del 25%). Ambas cosas son ciertas. Y revelan que, en el fondo, el porcentaje encierra una idea de proporcionalidad. Dicho de otra manera, está como preparado para "entrar" en una regla de tres en la que él mismo quiere jugar como razón.

¿De qué número es 3/5 el 2%?

El problema puede resolverse desde diversas perspectivas. En primer lugar po-

demos ver que el 1% del número buscado es la mitad de 3/5, es decir, 3/5 : 2 = 3/10. Por consiguiente, el número será 100 veces mayor: 100 x 3/10 = (100 x 3)/10 = 300/10 = 30.

O bien, podemos observar que 2% está contenido 50 veces en 100%, de donde bastará multiplicar 3/5 por 50 para llegar al número: 3/5 x 50 = (3 x 50)/5 = 150/5 = 30.

Ambos razonamientos pueden resumirse en el planteamiento habitual de la regla de tres:

3/5 2%
x 100%

que lleva al mismo resultado:

x = (3/5 x 100)/2 = (300/5)/2 = 60/2 = 30.

Nota: También puede resolverse en los términos planteados en el Cuaderno anterior. Es decir, la fracción 2/100, aplicada como operador a un número, nos ha llevado a 3/5. Para regresar al número, partimos de 3/5 y lo multiplicamos por el operador inverso, 100/2. Así, se obtiene: **3/5 x 100/2 = (3 x 100)/(5 x 2) = 300/10 = 30.**

Adela gana 120 pesos diarios, más el 4% sobre el monto de las ventas del día. Al cabo de 18 días laborales recibe 4.220 pesos. ¿Cuál fue el monto total de las ventas durante esos días?

Este problema fue resuelto en el Cuaderno anterior aplicando el operador multiplicativo correspondiente. Veamos una segunda alternativa de resolución.

En sus 18 días laborales, Adela ha percibido **18 x 120 = 2.160** pesos por concepto de salarios diarios fijos. Por lo tanto, por concepto de porcentajes sobre el monto de las ventas del día ha recibido **4.220 – 2.160 = 2.060** pesos, correspondientes al 4% de comisión sobre las ventas [hasta aquí como en el Cuaderno anterior].

Para conocer el monto total de estas ventas podemos establecer una regla de tres sencilla:

si al 4% de las ventas le corresponden 2.060 pesos,
al 100% de las ventas le corresponderán x pesos.

De donde:

x = (2.060 x 100)/4 = 51.500 pesos.

6. Proporcionalidad inversa entre dos magnitudes

Vamos a recoger tres de los ejemplos propuestos anteriormente como de situaciones cuyas magnitudes no estaban en una relación de proporcionalidad directa:

- Para recorrer una distancia fija, la velocidad de un vehículo y la duración del viaje
- Para hacer una obra fija, el número de obreros y el tiempo para terminar la obra
- El número de personas en la fiesta y el trozo de pastel que le tocará a cada una.

Supongamos, por ejemplo, que varios vehículos recorren una distancia de 120 km y que cada vehículo viaja a una velocidad constante. Veamos una tabla de situaciones posibles:

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
30	4
40	3
80	1 1/2
100	1 1/5

Evidentemente, las magnitudes velocidad y tiempo no están en una relación de proporcionalidad directa; por el contrario, al aumentar los valores de una, disminuyen los de la otra, y viceversa. En las situaciones de proporcionalidad directa, lo que se mantiene constante es la razón entre pares de valores correspondientes. Pero descubrimos que en las situaciones como las del ejemplo, lo que se mantiene **constante es el producto entre pares de valores correspondientes:** 30 x 4 = 40 x 3 = 80 x 1 1/2 = 100 x 1 1/5 = 120, siempre.

Generalizando a cualquier situación en que se relacionan dos magnitudes, si cualquier par de valores correspondientes *a y b, c y d* (donde a y c son de la primera magnitud, *y b y d* de la segunda) verifican la igualdad: *a x b = c x d*, entonces decimos que **las magnitudes se hallan en una relación de proporcionalidad inversa**, o que **son inversamente proporcionales**. Si denotamos como *x* e *y* ambas magnitudes, *y* como *k* el producto constante de cada par de valores correspondientes, la relación entre ambas magnitudes puede representarse mediante la expresión simbólica o fórmula: $x \times y = k$.

Ahora bien, del producto anterior a x b = c x d, y de acuerdo con la propiedad 2 de las proporciones, derivamos la siguiente proporción: a/c = d/b. Observemos que si se tratara de una situación de proporcionalidad directa, la proporción pertinente sería: a/b = c/d ó, lo que es lo mismo, a/c = b/d. Ahora descubrimos que, en nuestro ejemplo de velocidad-tiempo, la proporción se forma invirtiendo una de las razones que entra en juego (b/d pasa a ser d/b). De aquí el nombre de proporcionalidad inversa que se aplica a las magnitudes en este caso.

Así, en nuestro ejemplo, si tomamos los pares correspondientes 40 y 3, 30 y 4, la igualdad de productos es: 40 x 3 = 30 x 4, y la proporción derivada: 40/30 = 4/3.

Sobre la base de los planteamientos anteriores se establece la **técnica de la regla de tres inversa** para resolver los casos en los que, de los cuatro valores de dos pares correspondientes implicados, se conocen tres y se desconoce uno. Como en el caso de la regla de tres directa, esta técnica sugiere una evaluación de la pertinencia de su uso, una disposición de los datos, y un proceso de razonamiento que desembocan en una regla mecánica de cálculo (seguimos con el mismo ejemplo y nos preguntamos: ¿Cuánto tardará un vehículo si circula a 75 km/h?):

Pertinencia de su uso: Sí: estamos en una situación de proporcionalidad inversa.

Disposición de los datos:

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
60	2
75	t

Razonamiento: Si a una velocidad de 60 km/h se tardan 2 horas, a la velocidad de 1 km/h se tardaría 60 veces más (60 x 2), y a una velocidad de 75 km/h, 75 veces menos: $\frac{60x2}{75}$. De donde, t = $\frac{60x2}{75}$ = $\frac{120}{75}$ = 1,6 h.

Regla mecánica: Se multiplican los valores de la misma fila y se divide entre el término restante.

Si 15 obreros realizan un trabajo en 8 días, ¿cuánto tardarían 24 obreros, trabajando con el mismo nivel de productividad?

Se trata de una situación de proporcionalidad inversa entre ambas variables (¿por qué?). Los datos se disponen así:

Nº de obreros	Nº de días
15	8
24	x

El razonamiento procede así: Si 15 obreros tardan 8 días en hacer el trabajo, 1 solo obrero tardaría 15 veces más: **15 x 8 = 120 días;** y 24 obreros, 24 veces menos: **120/24 = 5 días.**

Obsérvese que en ambos tipos de reglas de tres, el razonamiento funciona de manera análoga, en el sentido de que **se busca el comportamiento de la unidad** (costo de 1 lápiz, en el ejemplo de la regla de tres directa; y tiempo para 1 obrero, en el último ejemplo). El carácter de la proporcionalidad determina, en cada caso, los pasos que siguen después.

7. La Regla de tres compuesta

A los tipos de regla de tres en las que se relacionan dos magnitudes las denominamos simples (directas o inversas). Compuestas son aquellas en las que ***intervienen más de dos magnitudes***. En este caso, es de notar que la relación de cada una de ellas con cada una de las demás puede ser de proporcionalidad directa o inversa, de modo que hay que razonar cada caso por separado. Veamos estos ejemplos:

Si gallina y media ponen un huevo y medio cada día y medio, ¿cuántos huevos pondrán 3 gallinas en 3 días?

La relación del número de huevos con el número de gallinas y con el de días, es directa en ambos casos (se supone que la productividad de las gallinas es constante...). Entonces, disponemos los datos así:

Nº de gallinas	Nº de huevos	Nº de días
1 1/2	1 1/2	1 1/2
3	x	3

Y razonamos así: Si 1 1/2 gallinas ponen 1 1/2 huevos en 1 1/2 días, en el mismo número de días el número de huevos puestos por 1 gallina será 1 1/2 veces menor: 1 1/2 / 1 1/2 = 1 huevo, y el número puesto por 3 gallinas, 3 veces mayor: 3 x 1 = 3 huevos. Pero esto ocurre en 1 1/2 días. Si fuera en 1 día, pondrían un número de huevos 1 1/2 veces menor: 3 / 1 1/2 = 2 huevos, y en 3 días, un número 3 veces mayor: 2 x 3 = 6 huevos.

Si 5 gatos cazan 5 ratones en 5 minutos, ¿cuántos cazarán 10 ratones en 10 minutos?

La relación del número de gatos con el número de ratones cazados es directamente proporcional; pero su relación con el número de minutos empleados en la caza, lo es inversamente (¿por qué?). Disponemos así los datos:

Nº de gatos	Nº de ratones	Nº de minutos
5	5	5
x	10	10

Y razonamos de la siguiente manera: Si 5 ratones son cazados por 5 gatos en 5 minutos, en el mismo tiempo 1 ratón será cazado por un número de gatos 5 veces menor: 5 / 5 = 1 gato, y 10 ratones, por un número de gatos 10 veces mayor: 10 x 1 = 10 gatos. Esto sucede en 5 minutos. Si tuviera que ocurrir en 1 minuto, el número de gatos debería ser 5 veces mayor: 10 x 5 = 50 gatos. Pero como ocurre en 10 minutos, el número de gatos será 10 veces menor: 50 / 10 = 5 gatos. Nos basta con los mismos 5 gatos del cuento...

Deduzca la regla "mecánica" para proceder en el caso de las reglas de tres compuestas.

8. La resolución de problemas en el campo de las razones y proporciones

En el campo de las razones y de las proporciones, los problemas pueden referirse a la utilización de los conceptos, de sus propiedades y de sus diversas representaciones. También destacan las situaciones referidas a porcentajes, mezclas, reparto proporcional, regla de tres directa e inversa, escalas, y otras relacionadas con las fracciones. Todo ello en contextos simbólicos o de aplicación a la vida diaria. Vamos a plantear algunos de estos tipos de problemas. Lo que sugerimos a nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia, antes de revisar la vía de solución que se presenta posteriormente.

a) Los atletas más veloces corren los 100 m en 10 segundos. ¿Cuál es su velocidad en km/h?

b) ¿Cuántos minutos faltan para el mediodía, si hace 8 minutos faltaban los 9/5 de lo que falta ahora?

c) Si una persona se incorpora al servicio militar a los 18 años, ¿a qué edad lo harán 5 personas?

d) Si m.d.c.(a, b) = 12, y a/b = 64/72, hallar a y b.

e) Determinar una fracción equivalente a 8/5 tal que la diferencia numerador – denominador sea igual a 45.

f) Este es el cuento: Juan, a punto de morir, le dice a su esposa embarazada: "Si la criatura que nazca es varón, la herencia se repartirá una parte para ti y dos para el niño; pero si es hembra, la herencia se repartirá dos partes para ti y una para la niña". Juan se muere (con todo y su machismo...) y la esposa da a luz mellizos, un varón y una hembra. ¿Cómo se repartirá la herencia, respetando la voluntad del difunto?

g) Los pueblos anglosajones todavía utilizan otros sistemas de medidas de longitud (pies, pulgadas, etc.). ¿Cuánto cree que vale π en ese sistema de medidas?

h) Si 24 gallinas ponen 24 docenas de huevos en 24 días, y si 6 gallinas comen 4 kilos de maíz en 6 días, ¿cuántos huevos equivalen a 1 kilo de maíz?

i) Tengo un mapa vial doble: en una cara aparece el país y en la otra, la capital. En la primera cara, dos ciudades distantes 105 km en línea recta, están a 15 cm; en la segunda,

dos plazas a 2,4 km en línea recta, están a 12 cm. ¿Cuál es la razón entre las escalas de los dos mapas?

j) Si el rey inglés Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo el rey Enrique IV?

k) Entre adornos dorados y plateados se compraron 160, que costaron 1.120 pesos. El número de dorados es la tercera parte del de los plateados, pero los primeros son cuatro veces más caros que los segundos. ¿Cuánto cuesta un adorno de cada tipo?

l) 4 vacas negras y 3 vacas marrones dan tanta leche, en 5 días, como 3 vacas negras y 5 vacas marrones en 4 días. Si todas las vacas de cada color son igualmente productivas, ¿qué clase de vacas da más leche?

m) Para preparar una salsa, la cocinera agrega 1/6 de cucharadita de pimienta en una comida para 6 personas. ¿Qué cantidad de pimienta deberá agregar si la comida es para 8 personas?

n) Si un trozo de madera en forma de ladrillo pesa 2 Kg, ¿cuánto pesará un trozo de la misma madera y de la misma forma, pero cuyas dimensiones (largo, ancho y alto) son la mitad de las del trozo inicial?

ñ) Un grupo de hombres y de mujeres declaran su edad por escrito, y se calculan los promedios de esas edades: el del grupo total, es de 40 años; el de los hombres, 50 años; y el de las mujeres, 35 años. ¿Cuál es la razón del número de mujeres al número de hombres?

o) Una persona desea darse un baño con agua a 35º C. Para conseguir esa temperatura, debe mezclar agua caliente con agua fría en una determinada proporción. Hace dos pruebas: en la primera, mezcla 1 parte de agua caliente con 2 de agua fría, y obtiene agua a 20º C; en la segunda mezcla 3 partes de agua caliente con 2 de agua fría, y obtiene agua a 28º C. Con estos datos, ¿en qué proporción debe mezclar ambos tipos de agua?

p) Hallar los números naturales a y b tales que su diferencia, su suma y su producto estén en la relación 1 : 7 : 24.

q) Estaba planificado realizar el trabajo en 14 días, con 15 obreros. Pero al terminar el 9º día se comprueba que sólo se han hecho los 3/7 de la obra. Si se desea acabar ésta a tiempo, ¿cuántos obreros se deben agregar al equipo?

Vamos, pues, a reportar algunas vías de solución para poder contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

a)La solución puede plantearse en términos de una regla de tres directa:

Distancia (m)	**Tiempo (segundos)**
100	10
x	3.600 (1 hora)

Lo que nos lleva a la respuesta en metros: **x = (100 x 3.600)/10 = 36.000 m = 36 km.** Estos atletas corren, pues, a una velocidad de 36 km/h

b) Hay dos intervalos de tiempo: el actual y el que existía 8 minutos antes. Este último está en una relación de 9 a 5 con respecto al primero. Podemos representar esta situación gráficamente, de la siguiente manera:

Ultimo intervalo (5 cuadrículas):

Primer intervalo, 8 minutos antes (9 cuadrículas):

Como puede observarse, la diferencia entre ambos intervalos viene dada por 4 cuadrículas, correspondientes a 8 minutos. Por lo tanto, cada cuadrícula equivale a dos minutos. Por consiguiente, ahora faltan 10 minutos para el mediodía. Hace 8 minutos faltaban 18. Y la razón 18/10 es igual a la razón 9/5.

c) Pues, desde luego, no será a los 90 años (5 x 18). Lo probable es que lo hagan también a los 18 años.

d) Podemos buscar la expresión irreducible de la razón entre a y b: a/b = 64/72 = 8/9. Si m.d.c.(a, b) = 12, basta que multipliquemos ambos términos de la razón 8/9 por ese valor para llegar a tener los dos números: a = 8 x 12 = 96 y b = 9 x 12 = 108.

e) Podemos resolver el ejercicio buscando todas las fracciones equivalentes a 8/5: {16/10, 24/15, 32/20...}, hasta llegar a aquella cuya diferencia denominador – numerador sea 45, es decir, a la fracción 120/75. Ahora bien, también podemos apoyarnos en el razonamiento proporcional, en el sentido de que si la diferencia numerador – denominador en la fracción 8/5 es 3, para llegar a una diferencia de 45 (y como 45 : 3 = 15), necesitamos multiplicar 8 y 5 por 15 para tener el numerador y denominador buscados.

Así, 8 x 15 = 120 y 5 x 15 = 75.

En este caso nos estamos apoyando en la propiedad 6 de las proporciones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y a>b $\rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, que se traduce (siendo ahora a y b el 1º y 2º términos de la razón buscada, tales que a-b = 45) en: $\frac{a}{b}=\frac{8}{5}\rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{8-5}{5}$ $\rightarrow \frac{45}{b}=\frac{3}{5}$. De donde se infiere que b = (45 x 5)/3 = 75. Ahora es fácil llegar al valor de **a = (8 x 75)/5 = 120.**

f) La voluntad machista de Juan puede traducirse así: el hijo percibirá siempre el doble de la mamá; y la hija, siempre la mitad de la mamá. Así que, si la hija percibe 1, la mamá percibe 2 y el hijo, 4. De modo que, dividida la herencia en 7 partes, **el hijo percibe 4/7 de la misma, la mamá 2/7 y la hija 1/7.**

g) Puede leer ahora la Posdata 2 (al final del Cuaderno). Pues el valor de π en ese sistema es el mismo que en nuestro sistema decimal: 3,141592..., porque no depende de las unidades en que se midan las longitudes de la circunferencia y de su diámetro.

h) Necesitamos igualar los términos de la comparación entre los huevos puestos por las gallinas y los kilos de maíz consumidos por ellas. Esta igualdad puede conseguirse en los términos de 24 gallinas y 24 días. En estas condiciones y según el enunciado, se recolectan 24 docenas de huevos. Ahora bien, si 6 gallinas comen 4 kilos de maíz en 6 días, 24 gallinas comerán 16 kilos de maíz (4 veces más) en 6 días, y 64 kilos (16 x 4) en 24 días, ya que la cantidad de maíz consumida es directamente proporcional al número de gallinas y a los días considerados. Por consiguiente, 24 docenas de huevos equivalen a 64 kilos de maíz o, proporcionalmente, **a (24 x 12)/64 = 4,5 huevos por cada kilo de maíz.**

i) Para el mapa vial del país, y a partir del dato de que dos ciudades distantes 105 km en línea recta, están a 15 cm, se puede obtener la escala: 15 cm / 105 km = 15 cm / 10.500.000 cm = 1/700.000. Análogamente, para el mapa vial de la capital: 12 cm / 2,4 km = 12 cm / 240.000 cm = 1/20.000. A partir de estos dos valores puede hallarse la razón entre las escalas de los dos mapas: (1/20.000)/(1/700.000) = 700.000/20.000 = 35/1. Es decir, **la escala del mapa de la capital es 35 veces mayor que la del mapa del país.**

j) No se le ocurra hacer una regla de tres (si a VIII le corresponden 6, a IV...). Mejor revisamos un libro de historia...

k) Si los adornos dorados son la tercera parte de los plateados, y se compraron 160 en total, podemos deducir que hay 40 adornos dorados y 120 plateados. En cuanto a los costos, como los adornos dorados son cuatro veces más caros que los plateados, los 40 adornos dorados equivalen en precio a 160 adornos plateados. Es decir, es como si estuviéramos pagando 1.120 pesos por 120 + 160 = 280 adornos plateados. Cada uno de éstos costará, pues, **1.120 : 280 = 4 pesos. Y los dorados, 4 veces más: 4 x 4 = 16 pesos.**

l) El enunciado "4 vacas negras y 3 vacas marrones dan tanta leche, en 5 días, como 3 vacas negras y 5 vacas marrones en 4 días", equivale a "20 vacas negras y 15 vacas marrones dan tanta leche, en 1 día, como 12 vacas negras y 20 vacas marrones en 1 día" (¿por qué?). Si retiramos de cada término de esta equivalencia de producción 12 vacas negras y 15 marrones, la igualdad de producción persistiría para 8 vacas negras, de un lado, y 5 vacas marrones, de otro. Luego se deduce fácilmente que las vacas marrones son más productoras de leche que las negras. Más aún, **la producción de leche de una vaca marrón equivale a 8/5 de la producción de una vaca negra.**

m) A lo mejor le tienta decir que 1/8 de cucharadita (porque como es 1/6 para 6 personas, pues para 8...). No; aquí hay que aplicar una regla de tres directa. Hágalo y verá que se trata de **2/9** de cucharadita de pimienta.

n) Ahora podemos sentir de nuevo la tentación de decir que el peso del trozo menor es también la mitad, es decir, 1Kg. No es así. El peso de un cuerpo es directamente proporcional a su volumen (peso = valor de la aceleración de la gravedad (constante) x volumen) y no a una de sus dimensiones. Cuando lleguemos al Cuaderno 16 (si no lo recordamos ahora), veremos que el volumen de un cuerpo sólido en forma de ladrillo se obtiene multiplicando las tres dimensiones; así que si cada dimensión del nuevo trozo de madera es la mitad de la del trozo anterior, el volumen será 1/2 x 1/2 x 1/2 = 1/8 del volumen inicial, así como el peso. **El nuevo trozo de madera pesará 1/8 x 2 Kg = 250 gramos.**

ñ) En primer lugar, aclaremos el significado de la edad promedio de un grupo. Si se tienen tres personas con 30, 33 y 42 años de edad, su promedio se calcula sumándolas y

dividiendo esa suma entre el número de personas, 3; es decir: (30 + 33 + 42)/3 = 105/3 = 35 años. Ahora bien, a partir del dato del promedio y conocido el número de personas consideradas, no podemos saber la edad de cada una de ellas, pero sí su suma. Así, si el promedio de edad de 4 personas es 40 años, sólo sabemos que la suma de sus edades es **4 x 40 = 160 años.**

De esta forma, si hay M mujeres y H hombres en el grupo, la suma de las edades de las mujeres será 35M (se entiende: 35 x M) y la suma de las edades de los hombres, 50H. En resumen, la suma de las edades de todas las personas presentes es 35M + 50H. Pero, por otro lado, esta suma total de edades puede calcularse también a partir del dato de que su promedio (para mujeres y hombres juntos, **M + H) es 40, mediante la expresión 40(M + H), que es igual a 40M + 40H.**

Tenemos dos formas de expresar la misma cantidad total de años de todos los presentes: 35M + 50H = 40M + 40H. Si "restamos" 35M y 40H en ambos términos de esa igualdad, conseguiremos esta igualdad más precisa: 10H = 5M, de la que se puede derivar la proporción: 10/5 = M/H, es decir, M/H = 2. **Lo que significa que el número de mujeres (M) es el doble que el de hombres (H).**

Otra forma de enfrentar la situación es suponiendo que todas las mujeres tienen 35 años y todos los hombres, 50. Si se supone que hay una mujer por cada hombre, se podría tener un número exacto de parejas de esa forma, y la edad promedio de una pareja sería la misma que la del grupo total. Este promedio sería: (35 + 50)/2 = 85/2 = 42,5 años (no es lo esperado). Pero si se supone que hay dos mujeres por cada hombre, se podría tener un número exacto de ternas de esa forma, y la edad promedio de una terna sería la misma que la del grupo total. Este promedio sería: **(35 + 35 + 50)/3 = 120/3 = 40 años.** Y este valor coincide con lo propuesto en el problema.

---

o) Una primera exploración del enunciado nos advierte que el agua caliente debe estar por encima de los 35º C, y que la temperatura del agua fría difiere bastante de la del agua caliente. Por otro lado, debemos recordar que en situaciones de mezcla de líquidos como la presente, la temperatura promedio se calcula dividiendo la temperatura total aportada por todas las cantidades de cada uno de los tipos de líquido, dividida por la cantidad total de líquido presente. Así, si tuviéramos 1 litro de agua caliente a 50º C y 2 litros de la fría a 5º C, la mezcla estaría a una temperatura promedio t:

t = (1 l x 50º C + 2 l x 5º C)/(1 l + 2 l) = (60 l x ºC)/(3 l) = 20º C

Las dos pruebas presentadas en el enunciado tienen como finalidad permitirnos averiguar las temperaturas a que se encuentran los dos tipos de agua, caliente y fría. El cálculo anterior, basado en la presencia de 1 parte de agua caliente a 50º C por 2 de agua fría a 5º C, nos ha llevado casualmente al promedio de 20º C de la 1ª prueba, pero su aplicación a la 2ª (3 partes de agua caliente por 2 de agua fría) nos llevaría a una temperatura promedio de 32º C (verifíquelo) y no de 28º C, como se esperaba. Luego las temperaturas propuestas no son las que se buscan. De todas formas, este ensayo nos orienta hacia una menor temperatura del agua caliente y mayor del agua fría. Este proceso de ensayo y ajuste (inténtelo) debe culminar con las temperaturas precisas: 40º C para el agua caliente y 10º C para la fría (compruébelo).

Falta ahora averiguar qué cantidad de cada tipo de agua se debe tomar para que la mezcla quede a 35º C. Podemos conjeturar con diversas razones entre las cantidades de agua caliente y fría. Por ejemplo, 2 a 1, 3 a 1, etc.; y si no se obtiene la temperatura promedio deseada, pasar a otro tipo de razones: 3 a 2, 4 a 2, ..., 4 a 3, etc. Este proceso de búsqueda puede concretarse en la siguiente tabla:

Nº de partes de agua caliente	Nº de partes de agua fría	Temperatura promedio
2	1	(2 x 40 + 1 x 10)/(2 + 1) = **30º C**
3	1	(3 x 40 + 1 x 10)/(3 + 1) = **32,5º C**
4	1	(4 x 40 + 1 x 10)/(4 + 1) = **34º C**
5	1	(5 x 40 + 1 x 10)/(5 + 1) = **35º C**

---

p) De acuerdo con el enunciado, se establecen las tres relaciones siguientes: 1ª: (a + b)/(a – b) = 7; 2ª: (a – b)/(a x b) = 1/24; y 3ª: (a + b)/(a x b) = 7/24. De la primera derivamos que a + b = 7 x (a – b), es decir, a + b = 7a – 7b. Si en esta igualdad, simultáneamente,

agregamos 7b y restamos a en ambos términos, se llega a: 8b = 6ª. Igualdad que, en términos proporcionales, significa que a y b están en razón de 8 a 6, es decir, de 4 a 3.

Para hallar los valores deseados podemos tomar pares de valores que estén en esa razón, calcular su producto y verificar si se cumplen las relaciones 2ª y 3ª establecidas al comienzo. Este proceso de búsqueda puede concretarse en la siguiente tabla:

a	b	a + b	a – b	a x b	(a + b)/(a x b)	(a – b)/(a x b)
4	3	7	1	12	7/12	1/12
8	6	14	2	48	14/48 = 7/24	2/48 = 1/24

Como puede observarse en la 2ª fila de valores de la tabla, ya hemos llegado a la respuesta solicitada: los números son 8 y 6.

q) La situación al cabo del 9º día puede describirse así: en 9 días, 15 obreros han ejecutado los 3/7 de la obra; y ahora, en 5 días, hay que hacer los 4/7 restantes de la obra. Vamos a colocar estos datos en la forma habitual de regla de tres compuesta:

si en 9 días	**15 obreros**	**han hecho**	**3 partes de la obra,**
en 5 días	**x obreros**	**harán**	**4 partes de la obra.**

Obsérvese que las variables número de obreros y partes de la obra están en relación de proporcionalidad directa, mientras que las variables número de obreros y número de días están en relación de proporcionalidad inversa. De esta forma: x = (15 x 9 x 4)/(5 x 3) = 36 obreros. Por consiguiente, habrá que incorporar 21 obreros más a partir del 10º día.

9. La meta: El desarrollo del razonamiento proporcional

Lo que buscamos con el aprendizaje de estas cuestiones relativas a las razones y proporciones es, indudablemente, dotarnos de herramientas matemáticas para resolver situaciones en las que intervengan las relaciones de proporcionalidad. Esta es una empresa necesaria. Pero, en definitiva, nuestra meta integral es desarrollar nuestro razonamiento proporcional, que es la forma de pensar que sabe reconocer cuándo dos variables están relacionadas proporcionalmente, para luego utilizar las herramientas de las que acabamos de hablar.

Este es un proceso en el que hay que afrontar situaciones variadas, con el fin de alcanzar cierto grado de madurez. Situaciones que permitan distinguir si la relación entre dos variables es de tipo aditivo o multiplicativo. Y si, en el caso multiplicativo, existe una relación cualitativamente directa (al aumentar los valores de una aumentan los de la otra) o inversa (al aumentar los valores de una disminuyen los de la otra). Y si, finalmente, dentro de cada uno de estas dos situaciones, se mantiene estrictamente la razón directa o inversa, respectivamente, entre los pares de valores relacionados.

Este es un proceso arduo, sobre todo para los aprendices más jóvenes. No en vano Piaget coloca el dominio del razonamiento proporcional como uno de los indicadores de logro del pensamiento formal en las personas. Este dominio marca, pues, una especie de cumbre en la formación matemática inicial de las personas, a la vez que se constituye en plataforma para aprendizajes posteriores más complejos.

10. Y ahora, otros ejercicios de razones y proporciones "para la casa"...

10. La suma y la diferencia de dos números están en razón de 9 a 5. Hallar el número mayor sabiendo que el menor es 6.

11. Se deben repartir 500 resmas de papel entre tres grupos de estudiantes. El reparto se va a hacer proporcionalmente al número de estudiantes de cada grupo. Uno de ellos recibe 120 resmas. Si el número de estudiantes de los otros dos grupos está en razón de 9 a 10, ¿cuántas resmas recibirán estos dos grupos?

12. Nuestro ciclista ha participado en muchas carreras durante esta temporada. Si llegó de 6º en la 15ª carrera, ¿en qué lugar llegó en la 5ª carrera?

13. Determine cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas:

a) Si se coloca a continuación de una vara otra vara de igual longitud y en la misma dirección, se obtiene una vara de longitud doble a la inicial.

b) Si se agrega a un líquido a cierta temperatura otra cantidad igual del mismo líquido y a la misma temperatura, se obtiene líquido al doble de la temperatura inicial.

c) Si a cada una de las ruedas de un carro que va a cierta velocidad, se le agrega otra rueda en el mismo eje y que va rodando a la misma velocidad, el carro alcanza automáticamente el doble de la velocidad que trae.

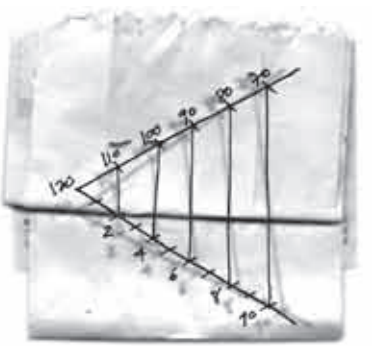
d) Si viene el doble de personas a comer, tengo que doblar la cantidad de cada uno de los ingredientes de la comida.

e) Si viene el doble de personas a comer, tengo que doblar el porcentaje de cada uno de los ingredientes de la comida.

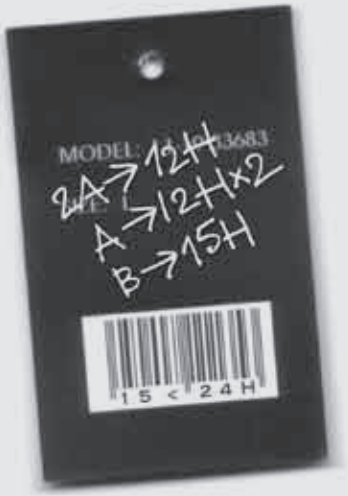
14. En la tienda, el precio de las camisas es el doble del de las camisetas. Compramos 4 camisas y varias camisetas. Pero a la hora de cobrarnos, la cajera cambia el número de camisas por el de camisetas, y viceversa, con lo cual venimos pagando 50% más de lo que nos correspondería hacer. ¿Cuántas camisetas compramos?

15. Si el 20% de a es b, y el 10% de b es 5, ¿cuánto vale a?

16. Pablo pesa 120 kg y desea rebajar su peso a 70 kg. En un programa de adelgazamiento que ve en televisión le garantizan que perderá 5 kg de peso cada mes. ¿En cuánto tiempo llegará a sus 70 kg?



17. Dos bombas de agua tipo A llenan un tanque en 12 horas; y una bomba tipo B lo llena en 15 horas. Si sólo se puede usar una bomba, ¿qué tipo de bomba llena el tanque más rápidamente?



18. En la preparación de un jugo, un grupo de niñas mezcla 2 medidas de jugo puro con 3 de agua, y la mezcla queda muy espesa. Otro grupo mezcla 3 medidas de jugo puro con 7 de agua, y la mezcla queda muy aguada. Si la razón correcta es de 3 medidas de jugo puro por 5 de agua, ¿cuántos vasos de cada tipo de mezcla hay que juntar para obtener 14 vasos de la mezcla correcta?

19. En una carrera participan tres caballos. Las apuestas están 5 a 1 para el primero, 4 a 1 para el segundo, y 3 a 1 para el tercero. ¿Cuánto hay que apostar a cada caballo para que, sea cuál sea el vencedor, se gane siempre 2.600 pesos?

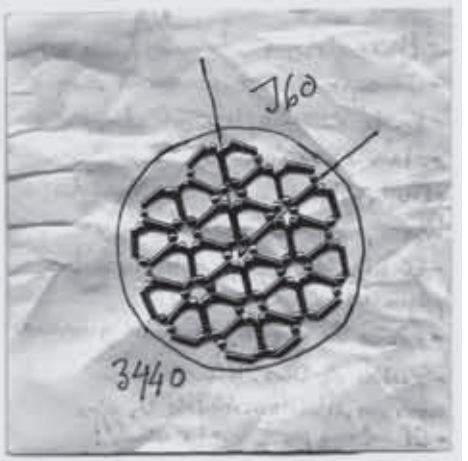
11. Ejercicios de recapitulación de fracciones, razones y proporciones, también "para la casa"...

20. Las uvas pasas que se obtienen al secar las uvas normales pesan un 32% del peso total de las uvas. ¿Cuánta cantidad de uvas se deben poner a secar para obtener 2 kg de uvas pasas?

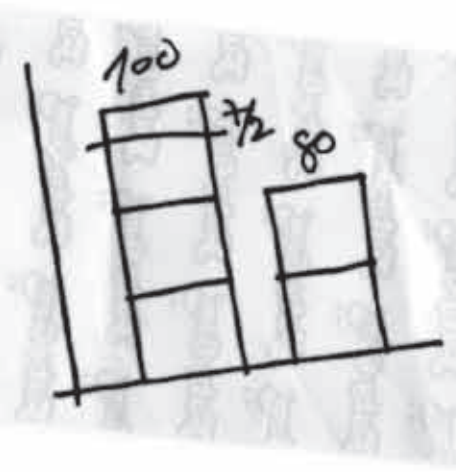
21. Se necesita una tela ya lavada para cubrir 224 m^2. A tal efecto, se compra una tela prelavada de algodón de un ancho de 1,60 m. Si esta tela, al lavarse y encogerse, pierde 1/9 de su longitud y 1/8 de su anchura, ¿cuántos metros lineales de tela prelavada deben comprarse?

22. Se necesitan 6 litros de una solución al 40%, pero sólo se dispone de soluciones al 26% y al 50%. ¿Cuántos litros de cada tipo de solución se requerirán?

23. En un pueblo, el 14% de sus habitantes es menor de 18 años. Si la diferencia de los de más edad con respecto a los menores de 18 es de 2.880 personas, ¿cuántos habitantes tiene el pueblo?



24. Si el café pierde 1/5 de su peso al tostarlo, y se compra verde a 1.200 pesos el kg, ¿a cómo debe venderse el kilo de café tostado para ganar 1/10 del precio de compra del café verde?

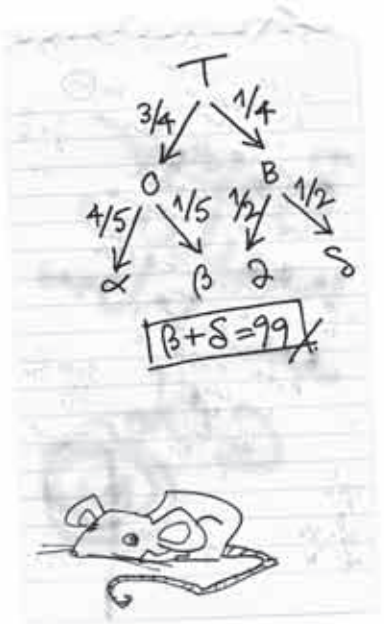


25. Si un niño mide 85 cm al cumplir dos años, ¿cuánto medirá al cumplir 6 años?

26. Tres de cada 5 habitantes de una ciudad son menores de edad, y 6 de cada 11 menores son varones. Si en la ciudad hay 7.200 varones menores de edad, ¿cuántos habitantes hay en la ciudad?

27. Si 6 muchachos pueden construir 6 casas prefabricadas en 6 días, y 12 muchachas pueden construir 12 en 12 días, ¿cuántas casas prefabricadas pueden construir 12 muchachos y 12 muchachas en 12 días?

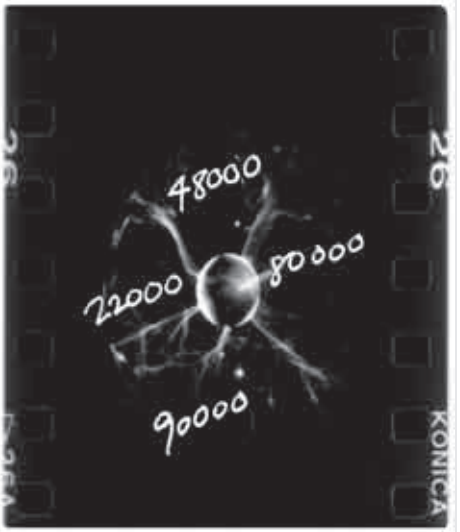
28. En un grupo de ratones de laboratorio, 75% son de pelaje oscuro y el resto, de pelaje blanco. Entre éstos, el 50% tiene ojos azules; y entre los de pelaje oscuro, el 20%. Si en total hay 99 ratones con ojos azules, ¿cuál es el número total de ratones?



29. Si x es el 250% de z, ¿qué porcentaje de x es 2z?

30. De las 4 horas que Julián dispone como tiempo libre, utiliza 1/5 del tiempo jugando en la casa, 1/4 leyendo, 3/8 viendo televisión, y el resto jugando en la calle. ¿Cuánto tiempo dedica a esta última actividad?

31. Al repartirse las utilidades en la empresa entre A, B, C y D, A recibe 1/5 de las mismas; B, 1/3; C, 3/8; y D, 58.000 pesos menos que B. ¿Cuánto recibe B?

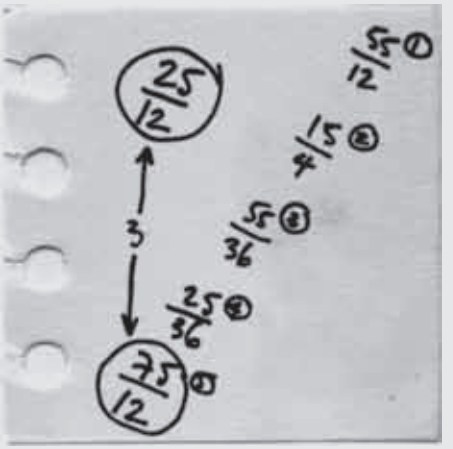


32. Sabemos que Juan, al cumplir 24 años, tenía 4 hijos. ¿A qué edad tenía ya 2 hijos?

33. ¿Existe algún par de números naturales a y b tales que 1/a + 1/b = 1/3?

34. Un dispositivo especial permite ahorrar 30% de combustible en un motor; un segundo dispositivo, si actúa solo, permite un ahorro de un 50%; y un tercero, también si actúa solo, de un 20%. Si se instalan los tres dispositivos juntos en el motor, ¿qué porcentaje de ahorro de combustible puede obtenerse?

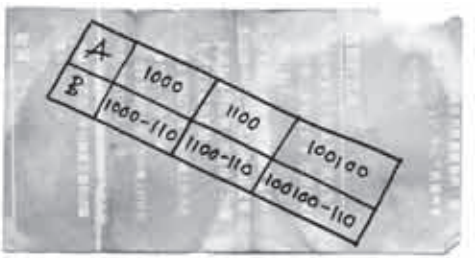
35. Sea la fracción $\frac{1+\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$. ¿Cuál de los números: 1, 2, 3, 4 ó 5, se debe multiplicar por 3 para que el valor de la fracción se triplique?



36. En el siguiente cuadro se muestran las edades de dos personas, A y B:

A	8	12	n
B	m	6	30

Si cuando B tenía 6 años, A tenía 12 (como se muestra en la tabla), ¿cuáles son los valores de m y n?



37. Sea m/n una fracción. Decida si son verdaderas o falsas las expresiones siguientes: a) $\frac{m}{n}+\frac{2}{2}=\frac{m}{n}$; b) $\frac{m}{n}+1=\frac{m+1}{n+1}$;

c) $\frac{m}{n}:\frac{2}{2}=\frac{m}{n}$; d) $\frac{1+m}{1+n}=\frac{m}{n}$; e) $\frac{3}{3}:\frac{m}{n}=\frac{n}{m}$

38. ¿Cuántos años tiene una persona, si cuatro veces un cuarto de su edad es 16?

39. En una fábrica, las mujeres representan el 35% de los trabajadores. Si hay 252 hombres más que mujeres, ¿cuántas personas trabajan en la fábrica?

40. En un recipiente A hay 4 g de sal y 6 cl de agua. En B hay 9 cl de agua, y en C 3 g de sal. ¿Qué cantidad de sal hay que colocar en B y qué cantidad de agua hay que verter en C para que, al final, el agua de los tres recipientes sea igual de salada?

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. 15 **2**. No se sabe **3**. 240 pesos **4**. 18 y 24 **5**. 24 y 27 años **6**. 38,5 x 26,5 cm **7**. No **8**. 3 x c = 4 x t **9**. Por cada 7 alumnos aprobados hay 3 reprobados **10**. 21 **11**. 180 y 200 resmas **12**. No se sabe (no existe proporcionalidad directa) **13**. Verdaderas: a) y d) **14**. 250 **15**. No se sabe (no hay que creer mucho en esas dietas...) **16**. 16 camisetas **17**. La del tipo B **18**. 12 vasos de la 1ª mezcla y 2 de la 2ª **19**. 2.400 pesos al 1º, 3.000 al 2º, y 4.000 al 3º **20**. 6,25 kg **21**. 4.000 habitantes **22**. 180 m **23**. 2,5 litros de la solución al 26% y 3,5 litros de la solución al 50% **24**. 1.620 pesos **25**. No se sabe (no existe proporcionalidad directa) **26**. 22.000 habitantes **27**. 36 casas **28**. 360 ratones **29**. 80% **30**. 42 minutos **31**. 80.000 pesos **32**. No se sabe (no existe proporcionalidad directa) **33**. a = b = 6 **34**. 72% **35**. El número 5 **36**. m = 2, n= 36 años **37**. Verdaderas: c y e) **38**. 16 años **39**. 840 personas **40**. 6 g de sal en B y 4,5 cl de agua en C.

Posdata 1: La filosofía de las proporciones

La filosofía griega nos planteó una disyuntiva interesante. Por un lado, Parménides argumentaba que el ser "es", es eterno, invariante; lo que es, es, y en ese sentido permanece, no varía. Pero por otro lado, Heráclito pensaba que "todo fluye", nada permanece, "nadie se baña dos veces en el mismo río". La proporción puede ofrecernos una respuesta a esta disyuntiva, al presentarse como la invariancia (lo estable) de las variaciones. Es decir, una razón (por ejemplo 1/2) puede formarse con pares de números que pueden ir cambiando: 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, etc. Pero al establecerse una proporción entre dos cualesquiera de estos pares ($\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$; $\frac{3}{6}=\frac{7}{14}$ ...), hay algo que no varía: la razón entre ellos.

Por eso la razón va más allá de la fracción: ya no interesa sólo la expresión de una relación estática entre la parte y el todo; más bien, interesa la razón como relación estable que fluye entre los pares de números encadenados a una proporción. Por eso la razón adquiere su sentido pleno sólo cuando se la considera como parte de una proporción.

La proporción es "la gran invención griega" (Serres, 1996, p. 266). Y como dice el mismo autor, con la proporción se inventa "el primer lenguaje de la ciencia": lo estable fluye.

Referencias Bibliográficas

- Serres, M. (1996). *Los orígenes de la geometría. Tercer libro de las fundaciones*. México: Siglo XXI.
- Uslar Pietri, A. (1981). *Cuéntame a Venezuela*. Caracas: Lisbona.
- Vergnaud, G. (1988), Multiplicative structures. En: J. Hiebert y H Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, pp.141-161. Reston: NCTM.
- Zippin, L. (1996). *Usos del infinito*. Madrid: Euler.

Posdata 2: ***Razones y propoporciones famosas***

Existen algunas razones famosas en la historia de la matemática, aunque no se expresen con números enteros. Una de ellas es la **razón constante entre la longitud de la circunferencia (C) y la de su diámetro (d)**. Este valor es el que conocemos como el número π (pi), cuyo valor es 3,141592... De modo que C/d = π.

Otra razón de interés histórico es la llamada **razón áurea** (Zippin, 1996). Surge al resolver este problema: Dividir un segmento dado en dos partes, tales que la menor (b) es a la mayor (a) como la mayor es al segmento total (a + b); es decir, $\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$. La razón b/a se conoce como razón áurea, y su valor es: (√5 – 1)/2, es decir, aproximadamente 0,618... Su interés histórico radica en que con esta razón se construyeron los rectángulos áureos (la razón del lado menor al mayor es 0,618...), que están presentes en numerosos elementos (la fachada, la planta, los ventanales, etc.) de muchas construcciones clásicas (las fachadas del Partenón y de la Universidad de Salamanca, el cuadro de Las Meninas de Velásquez...) así como en objetos de la vida diaria (carnés, cédulas, tarjetas, páginas...), y dan una extraña sensación de equilibrio y armonía... [Puede ampliarse este conocimiento buscando en Internet por los términos "razón áurea", "número de oro o áureo", "divina proporción", "sección áurea"...].

Finalmente, hay que destacar la sensación de armonía que presentan los cuadros y dibujos en los que se ofrece una **perspectiva** de la realidad que conserva sus dimensiones relativas y, particularmente, la "profundidad" de la escena. Desde el punto de vista matemático, se trata de conservar en el plano del dibujo las proporciones que presentan los objetos reales entre sí. Esta armonía es la que se echa de menos en los cuadros de los llamados pintores primitivos, o ingenuos, que presentan todos los objetos en un mismo plano, pero cuyo valor artístico no se pone en duda (lo que revela que la lógica de la matemática y la estética de la obra artística pueden convivir en mundos complementarios, que a veces se cruzan...).

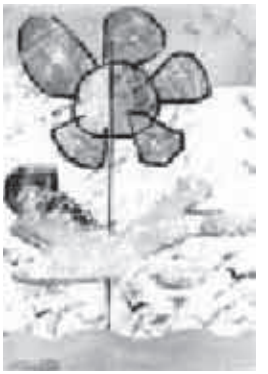
Posdata 3: ***Las razones en el cuerpo humano***

Un ejercicio muy interesante para las clases con nuestros niños puede consistir en tomar las medidas de ciertas partes del cuerpo y relacionarlas entre sí. Por ejemplo, la medida, de punta a punta, de nuestros brazos extendidos horizontalmente, con la medida de nuestra estatura. Y también, la medida del contorno de nuestro puño cerrado, con la medida de nuestro pie. Y la medida del contorno de nuestro cuello, con la medida del perímetro de nuestra cintura. Se obtienen así tres razones interesantes (se pueden descubrir otras...)

Si realizamos este ejercicio con un grupo relativamente numeroso de niños y niñas, podemos observar que los valores de las tres razones tienden a estabilizarse alrededor de ciertos valores. ¿Se animan?

Índice

A modo de Introducción	**5**
1. El concepto matemático de razón	**7**
2. La Aritmética de las razones	**8**
3. El concepto matemático de proporción	**9**
4. Algunas situaciones particulares referidas a razones y proporciones	**12**
4.1 Las Escalas	**12**
4.2 Los repartos proporcionales	**12**
5. Proporcionalidad directa entre dos magnitudes	**13**
5.1. La regla de tres directa	**16**
5.2. El caso particular del Porcentaje	**17**
6. Proporcionalidad inversa entre dos magnitudes	**18**
7. La regla de tres compuesta	**19**
8. La resolución de problemas en el campo de las razones y proporciones	**20**
9. La meta: El desarrollo del razonamiento proporcional	**24**
10. Y ahora, otros ejercicios de razones y proporciones “para la casa”...	**24**
11. Ejercicios de recapitulación de fracciones, razones y proporciones, también “para la casa”...	**26**
Referencias bibliográficas	**28**
Respuestas de los ejercicios propuestos	**28**
Posdata 1: La filosofía de las proporciones	**28**
Posdata 2: Razones y propoporciones famosas	**29**
Posdata 3: Las razones en el cuerpo humano	**29**



FE Y ALEGRIA